Capitolo 2

Serie Numeriche

Iniziamo ricordando la nozione di *successione* e le operazioni definibili tra successioni. Questo permetterà di poter definire, con una certa semplicità la nozione di somma infinita (serie) ed il modo di operare con le serie.

Definizione 2.1 *Una* ***successione*** *è una lista infinita di numeri, che scriveremo nella forma generale come*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \cdots,\ a_n,\ a_{n+1}, \cdots$$

spesso chiameremo ***termini*** *i singoli elementi della successione; così per esempio* a_4 *è il quarto termine della successione e* a_n *è l'ennesimo elemento. Parlando in termini analitici, la successione è l'immagine di una funzione* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *il cui dominio sono i numeri naturali e l'immagine i reali.*
Un modo per indicare l'insieme degli elementi della successione è dato da

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ o semplicemente } \{a_n\}\ .$$

Ricordo che l'interesse principale nello studio delle successioni è quello di capire quale è il loro **limite**, cioè qual'è il comportamento dei termini della successione quando l'indice muove verso l'infinito.
Continuiamo la trattazione con alcuni esempi semplici che ci permettano, da un lato di capire cosa intendiamo per comportamento dei termini quando l'indice muove verso l'infinito e dall'altra per continuare ad introdurre notazioni e terminologia.

Esempio 2.2 *Studiare la successione* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *i cui termini sono definiti dalla formula* $a_n = 1/n$.

Soluzione. I termini della successione sono dati da

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots \frac{1}{10},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{12},\ \ldots,\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{101},\ \ldots,\ \frac{1}{1000},\ \ldots$$

Si vede subito che al crescere dell'indice la successione tende a zero. Al crescere di n il termine $1/n$ si avvicina sempre più a zero. Dal punto di vista simbolico scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

ed affermiamo che la successione *converge* a zero. ■

Esempio 2.3 *Supponiamo che la successione* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *sia data da*

$$b_k = \frac{(-1)^k}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Qual'è (se esiste) il $\lim_{k\to\infty} b_k$?

Soluzione. Scriviamo i termini della successione, si ha

$$-\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \ldots \frac{1}{10},\ -\frac{1}{11},\ \frac{1}{12},\ \ldots,\ \frac{1}{100},\ -\frac{1}{101},\ \ldots,\ \frac{1}{1000},\ -\frac{1}{1001},\ \ldots$$

Sebbene i termini oscillino in segno, essi si avvicinano comunque a zero al crescere dell'indice. Possiamo quindi affermare che, da un certo indice in poi, rimangono all'interno di qualsiasi intervallo scelto, centrato in zero. La *successione converge* e si ha

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 0$$

■

Esempio 2.4 *Consideriamo la successione* $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ *data da* $c_i = i$. *Cosa si può dire della successione?*

Soluzione. Scrivendo i termini della successione si ha

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots, i,\ i+1, \cdots$$

Al crescere dell'indice i i termini della successione crescono indefinitamente, o come si dice *la serie diverge* a più infinito. Si scrive allora

$$\lim_{i\to\infty} c_i = +\infty$$

■

Esempio 2.5 *Converge la successione* $\{d_j\}_{j=0}^{\infty}$ *il cui termine generale è dato da* $d_j = (-1)^j$ *?*

Soluzione. Se scriviamo esplicitamente i termini della successione abbiamo

$$1,\ -1, 1, -1,\ 1,\ -1, \cdots, 1, -1, \cdots$$

E' chiaro che i termini della successione "oscillano" tra i due valori 1 e -1 senza poter quindi "convergere" , né divergere verso niente. Diremo che la successione *non converge né diverge.* ■

Nota 2.6 *Come si può osservare negli esempi precedenti a volte la successione inizia con l'elemento di indice zero, altre volte con l'indice uno. Questo non ha nessuna importanza nella determinazione del comportamento della successione, così come non ha alcuna importanza che l'indice che determina gli elementi sia indicato con la lettera* n, k, i, *o* j. *Chiaramente*

$$a_n = \frac{1}{n},\quad n = 1,\ 2,\ 3, \cdots \quad \textit{oppure} \quad a_k = \frac{1}{k},\quad k = 1,\ 2,\ 3, \cdots$$

determinano la stessa successione così come $f(x) = \sin x$ *o* $f(t) = \sin t$ *determinano la stessa funzione.*

In realtà, successioni e funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono strettamente correlate potendo dire che

Definizione 2.7 *Una successione può essere considerata come la restrizione di una funzione reale di variabile reale agli interi positivi.*

Abbiamo già detto come una successione può essere vista come una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ed in fondo le due definizioni dicono la stessa cosa.

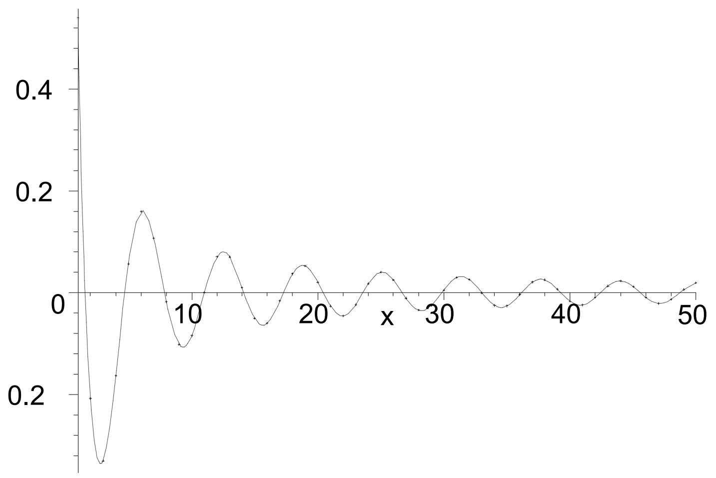
Ricordando che il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'insieme delle coppie (x, y) del piano tali che $y = f(x)$ possiamo parlare del grafico di una successione come l'insieme delle coppie del piano del tipo (n, a_n) quando n si muove sui naturali.
Vediamo un esempio

Esempio 2.8 *Consideriamo la funzione* f *e la successione* $\{a_n\}$ *definita da*

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}\ ;\quad a_n = \frac{\cos n}{n}\ .$$

Disegnare entrambi i grafici. Cosa ci dicono i grafici sul limite della successione?

Soluzione.



Grafici di $\frac{\cos x}{x}$ e di $\frac{\cos n}{n}$

I grafici sovrapposti mostrano come la successione $\{a_n\}$ sia una campionatura, sugli interi, della funzione f. I grafici ci fanno inoltre vedere come al tendere di x o di n all'infinito la funzione e la successione, sebbene in modo oscillatorio, convergano a zero. ■

Non tutte le successioni possono essere lette, in modo naturale, come una campionatura, sui naturali, di una funzione semplice. Per esempio, la successione $\{n!\}$ non ha una semplice interpretazione rispetto alla funzione $x!$ (che pure esiste).

Come abbiamo cercato di far vedere, le successioni sono dei tipi speciali di funzioni che hanno come dominio $\mathbb{N}$ piuttosto che $\mathbb{R}$. Ne consegue che anche la definizione di limite per successioni ricalca, in buona sostanza, quella data per le funzioni, possiamo allora dire che

Definizione 2.9 ***(Informale) (Limite di successioni).*** *Sia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione ed L un numero reale. Se al crescere dell'indice n, la distanza di a_n da L diminuisce al di sotto di qualunque tolleranza prefissata, allora la successione converge ad L. In simboli*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Nota 2.10 *:*
Divergenza all'Infinito. *Se* $a_n \to +\infty$ *o* $a_n \to -\infty$, *quando* $n \to \infty$, *diremo che la successione* **diverge** *a (più o meno) infinito. Scriveremo, per esempio*

$$\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$$

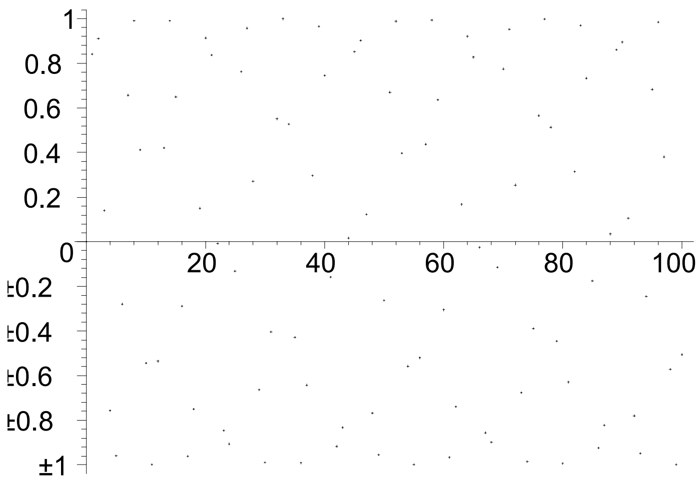
(verificare).
Asintoti. *Una successione, così come una funzione, converge ad un limite finito L se e solo se il suo grafico ammette un asintoto orizzontale in* $y = L$.

Successioni, funzioni e limiti. Molte successioni, come abbiamo visto, possono essere lette come discretizzazioni di funzioni . Non è sbagliato, in questo caso usare e studiare le proprietà di queste funzioni per ricavare le notizie che interessano rispetto alle successioni. Possiamo infatti dire che

Criterio 2.11 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione definita per* $x \geq 1$.
Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *ed inoltre* $a_n = f(n)$ *per tutti gli* $n \geq 1$, *allora* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Esempio 2.12 *Studiare il comportamento della successione* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *il cui termine generale ha la forma* $a_k = \sin k$.

Soluzione. Lo studio del grafico può esserci utile per cercare di capire se è possibili individuare una tendenza di comportamento della successione



Il grafico di $\sin k$, $1 \leq k \leq 100$

Come appare chiaro, il grafico, non solo non ci da un'indicazione sul valore del limite, ma sembrerebbe indicare una NON esistenza (almeno fino al valore 100 del parametro). Si tratta di sostanziare questa impressione (provate). ■

2.1 Limiti di Successioni

Procediamo per esempi.

Esempio 2.13 *Sia data la successione $a_n = 2^n/n^2$. Qual'è il suo comportamento all'infinito?*

Soluzione. Consideriamo la funzione $f(x) = 2^x/x^2$. Quando $x \to +\infty$ la funzione assume una forma del tipo $+\infty / +\infty$ è perciò possibile usare la regola dell'Hospital per capire l'esistenza o meno del limite. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \log 2}{2\,x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \log 2 \log 2}{2} = +\infty$$

Poiché $f(x) \to +\infty$ allora anche $a_n \to +\infty$.

Esempio 2.14 *Trovare, se esiste, il limite della successione $n^{1/n}$.*

Soluzione. Apparentemente, la regola dell'Hospital sembra fuori luogo, visto che non esiste alcuna forma del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Proviamo, però, ad applicare la funzione logaritmo naturale, si ha

$$a_n = n^{1/n} \implies \ln(a_n) = \frac{\ln n}{n}$$

Adesso possiamo applicare il nostro parallelo ed usare la regola dell'Hospital. E'

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0\,.$$

Da questo risultato segue che

$$\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = 0 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

■

Esercizio 2.15 *Provare a dimostrare che*

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad \textit{per tutti i valori di } x > 0$$
$$\lim\nolimits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \textit{per tutti i valori di } k > 0$$
$$\lim\nolimits_{n\to\infty} r^n = 0 \quad \textit{per } -1 < r < 1$$

Parlando ancora di limiti sembra plausibile affermare che

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{3n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=0+3=3$$

Questo risultato poggia su un teorema, visto in Analisi 1 per le funzioni, che afferma

Teorema 2.16 *Supponiamo che per $n\to\infty$ si abbia $a_n\to L$, $b_n\to M$ dove L, M, sono numeri finiti. Sia inoltre c una costante reale. Si ha*

$$(c\,a_n)\to c\,L\,,\qquad (a_n\pm b_n)\to L\pm M\,,\qquad (a_n\,b_n)\to L\,M$$

Inoltre, se $M\neq 0$ si ha $\dfrac{a_n}{b_n}\to\dfrac{L}{M}$.

Il teorema dei Carabinieri (o del sandwich), già formulato in Analisi I per le funzioni, può essere riparafrasato per le successioni

Teorema 2.17 ***(dei Carabinieri)*** *Supponiamo che per tutti gli $n>0$ si abbia*

$$a_n\le b_n\le c_n \quad e \quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=L\,.$$

Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty}b_n=L\,.$$

Esempio 2.18 *Dimostrare che è* $\lim_{k\to\infty}\dfrac{\sin k}{k}=0.$

Soluzione. Poiché per ogni $x\in\mathbb{R}$ vale la disuguaglianza $-1\le\sin x\le 1$, possiamo scrivere che

$$-\frac{1}{k}\le\frac{\sin k}{k}\le\frac{1}{k}$$

per tutti i $k>0$. Poiché al tendere di $k\to\infty$ sia $-\frac{1}{k}$ che $\frac{1}{k}$ tendono a zero, ne segue che $\lim_{k\to\infty}\dfrac{\sin k}{k}=0.$ ■

Non sempre è possibile riuscire a trovare il valore del limite di una successione. Possiamo però porre il problema "più debole" di sapere se una successione converge o meno, pur senza trovare il valore del limite. Una situazione che appare particolarmente favorevole a dare una risposta a questa domanda si ha quando la successione è **monotona.**
Ricordiamo che una successione è detta **monotona crescente** se $a_n\le a_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. La definizione di monotona decrescente è consequenziale.
Il seguente teorema è relativamente evidente

Teorema 2.19 *Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ sia monotona crescente e limitata superiormente da un numero M. In altre parole che*

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq M \, .$$

Allora la successione $\{a_n\}$ converge ad un qualche limite finito A, con $A \leq M$. In modo del tutto simile, se $\{b_n\}$ è una successione monotona decrescente e limitata inferiormente da un numero N, allora $\{b_n\}$ converge ad un numero B tale che $B \geq N$.

Esempio 2.20 *Sia data la successione $\{a_n\}$, con $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Verificare che è convergente.*

Soluzione. Verifichiamo prima che la successione è monotona crescente e poi che è limitata superiormente. Consideriamo il quoziente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 1 \, , \qquad \text{da cui} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \, , \quad \text{cioè} \quad a_{n+1} > a_n \, ,
\end{aligned}$$

la successione è dunque monotona crescente.

Il risultato si è ottenuto perché $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, quindi $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} > 1$ ed è noto che se $1 < A < B$ allora $1 < A^n < B^n$, n positivo.

Più laborioso e complicato dal punto di vista del calcolo è verificare che la successione è limitata superiormente. Usando la formula del binomio di Newton si ha:

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k \\
&= 1 + n\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}
\end{aligned}$$

Consideriamo il generico elemento $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$, scriviamo esplicitamente e operiamo delle maggiorazioni, si ha

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{1}{n^k} = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)}^{n\text{-termini}}}{k!}\,\frac{1}{n^k} \\
&= \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\,\frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

con la maggiorazione che viene operata per ogni termine con $k \geq 2$. L'ultimo passaggio si ha perché ognuno dei termini nel prodotto è minore di uno e quindi si maggiora sostituendolo con 1. Si ha allora che il termine a_n può essere maggiorato con

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

ma $\dfrac{1}{k!}$ può essere maggiorato nel seguente modo

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (k-1) \cdot k} \leq \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}\,.$$

Ne consegue che si ha

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3\,. \end{aligned}$$

Quindi la successione $\{a_n\}$ ha la proprietà cercata.

Si ha infatti $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq 3$. ■

Definizione 2.21 *Si indica con e il numero*

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Il numero e è un numero irrazionale ed il suo valore approssimato alla quindicesima cifra decimale è dato da

$$e \approx 2,718281828459045\,.$$

Esempio 2.22 *Consideriamo la successione $\{a_n\}$ definita da*

$$a_1 = 0\,, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}\,, \quad n \geq 1\,.$$

Mostrare che la successione converge.

Soluzione. proviamo a calcolare i primi elementi della successione, si ha

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0\,, a_2 = \sqrt{2}\,,\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1.\,847\,8\,,\\
a_4 &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx 1.961\,6\,, a_5 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \approx 1.9904\,,\\
a_6 &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \approx 1.9976\\
a_7 &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}} \approx 1.9994
\end{aligned}
$$

Da questi conti sembrerebbe che $a_n < a_{n+1}$ ed inoltre che $a_n < 2$, allora usando la formula che definisce la successione si ha

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$$

Ne segue che nessun termine della successione è maggiore di 2. Ne consegue che la successione è monotona crescente limitata superiormente, ammette perciò limite che non può essere maggiore di 2. (In realtà è proprio 2). Rimane ovviamente il problema che NON abbiamo dimostrato che la successione è monotona, lo abbiamo solo SUPPOSTO estrapolandolo dal comportamento dei primi sette termini. E' davvero così ?.(Provare)

2.1.1 Esercizi

Negli esercizi 1-4 dedurre l'espressione simbolica per il termine generale della successione

1. $1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\dots$
2. $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\dots$
3. $\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{16},\ \frac{5}{32},\dots$
4. $\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{17},\ \frac{1}{26},\ \frac{1}{37},\dots$

   Negli esercizi da 5 a 24 calcolare dapprima i termini $a_1,\ a_2,\ a_5,\ a_{10}$ (eventualmente in modo approssimato alla quarta cifra decimale). Determinare poi il $\lim_{n\to\infty} a_n$ (se esiste).

5. $a_n = (-3/2)^n$
6. $a_n = (-0.8)^n$
7. $a_n = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^n$
8. $a_n = \left(\frac{\pi}{e}\right)^n$
9. $a_n = (1/n)^n$
10. $a_n = \left(\arcsin\frac{1}{2}\right)^n$
11. $a_n = \arctan n$
12. $a_n = e^{-n}$
13. $a_n = \left(\frac{\sqrt{39}}{17}\right)^n$
14. $a_n = (1.1)^n$
15. $a_n = (0.9)^n$
16. $a_n = \frac{k^2}{3k^2+2k+1}$
17. $a_n = \sqrt[3]{\frac{3k+3}{k+1}}$

18. $a_n = \sin n\pi$
19. $a_n = \cos \dfrac{1}{n}$
20. $a_n = \dfrac{\log(3+k^3)}{\log(2+4k)}$
21. $a_n = n \sin \dfrac{1}{n}$
22. $a_n = (2^n + 3^n)^{1/n}$
23. $a_n = \dfrac{n^2}{e^n}$
24. Mostrare che $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 0$ per tutti gli $x > 0$
25. Sia $a_k = \left(1 + \dfrac{x}{k}\right)^k$ con x numero reale.
    (a) Mostrare prima che $\lim_{k\to\infty} \ln(a_k) = x$.
    (b) Usare la parte (a) per calcolare $\lim_{k\to\infty} a_k$
26. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^n$

2.2 Serie: Convergenza e Divergenza.

Una **serie** è una somma di infiniti termini, cioè un'espressione della forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots$$

Se, per esempio $a_k = \dfrac{1}{k^2}$ allora si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Se $a_k = k$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots$$

Il problemi che solleva la definizione di una serie sono i seguenti

- Cosa significa sommare infiniti numeri?
- Quali serie hanno per somma un numero finito e quali no?
- Se una serie ha somma finita come si può calcolare, o almeno stimare?

2.2.1 Convergenza: Definizioni e Terminologia

Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots$.
Chiameremo a_k il termine generale k-esimo della serie.
La **somma parziale n-esima** S_n è la somma (finita) dei primi n termini della serie.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n.$$

Chiameremo R_n **resto n-esimo** della serie la differenza tra la somma infinita e la somma parziale n-esima, cioè

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

Come suggerisce la denominazione R_n è ciò che rimane della serie una volta sommati i primi n termini, per cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + R_n \ .$$

Definizione 2.23 *Se* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ *per qualche valore finito* S *diremo che la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge ed ha come somma* S*. Se il limite va all'infinito diremo che la somma diverge, altrimenti che la serie è indeterminata.*

Nota 2.24 *La definizione ci dice che*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

se il limite esiste. Poiché abbiamo definito $S = S_n + R_n$ *la convergenza di* $S_n \to S$ *implica che* $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$*. Inoltre, la convergenza della serie implica la convergenza della successione delle somme parziali* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Vogliamo qui ricordare la similitudine con gli integrali impropri per i quali abbiamo una definizione con le stesse caratteristiche*

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} f(x)\, dx\,.$$

Esempio 2.25 *Dire se converge la serie (serie geometrica)*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\quad.$$

Soluzione. Cominciamo col calcolare le somme parziali, si ha

$$\begin{aligned}
S_0 &= 1 = 2 - 1 \\
S_1 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2} \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4} \\
S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8} \\
S_4 &= S_3 + \frac{1}{16} = 2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 2 - \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Se ne ricava un andamento che dice

$$S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Ne segue che $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \dfrac{1}{2^n} = 2$. La serie converge e la sua somma è 2. Inoltre è $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = 2 - S_n = 2 - \left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^n}$. ■

Esempio 2.26 *Consideriamo la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$. *Dire se converge o meno.*

Soluzione. Scriviamo le somme parziali, si ha:$S_0 = 1,\ S_1 = 0,\ S_2 = 1,\ S_3 = 0$. La successione $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ è allora data da $1, 0, 1, 0, 1, \cdots$ che non converge né diverge. La serie è indeterminata.

Esempio 2.27 *Consideriamo adesso la serie (armonica)*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}\,.$$

Cosa possiamo dire del comportamento di questa serie?

Soluzione. La successione selle somme parziali è chiaramente monotona crescente. Il termine S_n si ottiene dal precedente sommandogli il numero positivo $1/n$

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n}\,.$$

Sappiamo che le successioni monotone (crescente in questo caso) convergono o divergono, dipendentemente dal fatto che siano o meno superiormente limitate. Per decidere quindi della convergenza della serie rimane aperto il problema della limitatezza o meno della successione monotona $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Nota 2.28 *Decidere se una serie converge o meno non è sempre semplice così come non è stato semplice decidere in Analisi I la convergenza degli integrali impropri. Serie del tipo*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \quad e \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

pongono entrambe il problema della convergenza (notare che in entrambi casi è $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$*) così come lo ponevano i due integrali impropri*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \quad e \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx\,.$$

Anche per questi integrali, l'integrando tende a zero per $x \to \infty$*, ma abbiamo visto che si hanno risultati diversi, il primo diverge, il secondo converge.*

Possiamo provare a disegnare le due serie precedenti per cercare di capire l'andamento di crescita

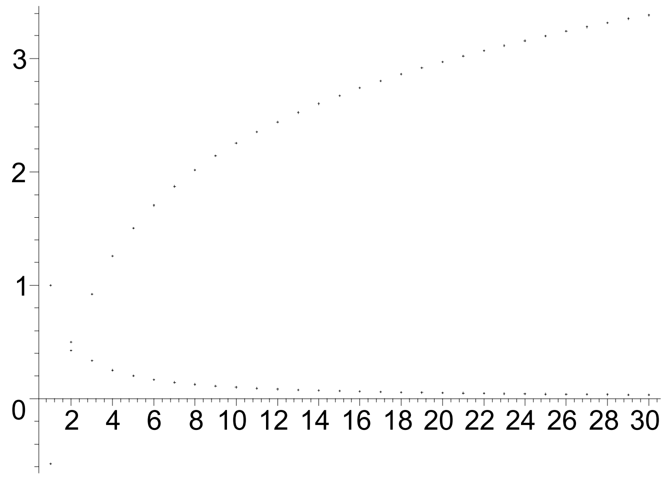


Figura 2.1: Elementi e somme parziali di $\sum 1/k$

2.2.2 Serie Geometriche e Serie Telescopiche

Le serie geometriche formano una classe importante e semplice.

Definizione 2.29 *Una serie geometrica ha la forma*

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n + \cdots$$

Il numero r viene chiamato ***ragione*** *della serie.*

La proprietà più importante delle serie geometriche è che non solo è facile decidere della loro convergenza o meno, ma è possibile, con pochissimo sforzo, calcolarne la somma. Infatti si ha

Proposizione 2.30

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \ , \ r \neq 1$$

Dimostrazione. Per verificare che la formula è vera basta moltiplicare l'uguaglianza per $(1-r)$, si ha

$$\begin{aligned}
(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k &= \sum_{k=0}^{n} r^k - r\sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^k - \sum_{k=0}^{n} r\, r^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} r^k - \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} \\
&= \big(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n\big) \\
&\quad - \big(r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n + r^{n+1}\big) \\
&= 1 - r^{n+1}\,.
\end{aligned}$$

■

La formula ci fornisce la convergenza o meno della serie. Si ha infatti

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & se \quad |r| < 1 \\ +\infty & se \quad r > 1 \\ \nexists & se \quad r \le -1 \end{cases}$$

Possiamo esprimere e condensare il risultato nel seguente modo.

Teorema 2.31 *Se $|r| < 1$ la serie geometrica $\sum_{k=0}^{n} r^k$ converge ed ha come somma $\dfrac{1}{1-r}$. Se $|r| \ge 1$ la serie non converge.*

Esempio 2.32 *Consideriamo la serie $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}, \ \ldots$. Cosa possiamo dire della sua convergenza?*

Soluzione. Riscriviamo i termini della serie nel seguente modo,

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right).$$

Si riconosce che siamo di fronte alla serie data da

$$\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

la cui ragione è $1/2$ e la somma è data da

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,.$$

■

Esempio 2.33 *Consideriamo la serie* $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $-\frac{1}{40}$, $\frac{1}{80}$, $\ldots$. *Cosa possiamo dire della sua convergenza?*

Soluzione. Analogamente a prima, vediamo che possiamo riscrivere il tutto come

$$\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots\right)=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k .$$

La ragione della serie è $-1/2$ e la somma della serie è data da

$$\frac{1}{5}\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15} .$$

■

Abbiamo visto come le serie geometriche ci permettano di calcolare la somma della serie facilmente. La stessa proprietà è anche delle **serie telescopiche** Vediamo con un esempio cosa intendiamo con questo nome

Esempio 2.34 *Provare la convergenza e trovare la somma della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ (k+1)}$$

Soluzione. Il fattore $\dfrac{1}{k\ (k+1)}$ può essere scomposto, come è noto anche dall'algebra studiata per la soluzione degli integrali di funzioni razionali, nella forma $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ (k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) .$$

Costruiamo adesso la somma parziale n-esima S_n. Si ha

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Dalla prima alla seconda riga si passa notando semplicemente che scrivere $\dfrac{1}{k+1}$ facendo variare k da 1 ad n è equivalente a considerare $\dfrac{1}{k}$ mentre k varia da 1 ad $n+1$. ■

Nota 2.35 *Prima di andare avanti vogliamo qui ricordare due comandi di* Maple *che possono risultare utili per un'analisi numerica dei problemi che stiamo affrontando. Il primo riguarda la somma delle serie o delle somme parziali. Il secondo ricorda come si fa a valutare numericamente un espressione o un elemento simbolico*
▶`sum('f(k)', 'k')` *calcola la somma indefinita di* `f(k)` *rispetto a* `k`*:*
▶`sum('f(k)', 'k'=m..n)` *calcola la somma di* `f(k)` *nell'intervallo* `m..n`*, così calcola* `f(m) + f(m+1) + ... + f(n)`*;*
in entrambi i casi, se Maple non riesce a trovare la soluzione in forma chiusa da come risposta la funzione stessa.
▶`evalf(espressione, n)` *calcola numericamente il valore dell'espressione con* `n` *cifre significative.*

2.2.3 Proprietà Algebriche delle Serie Convergenti

Come già visto per funzioni e successioni, combinando tra loro in modo algebrico delle serie si ottengono nuove serie. La combinazione algebrica di serie convergenti da luogo a serie convergenti.

Teorema 2.36 *Supponiamo che* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converga al numero* A *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converga al numero* B*. Sia* β *una costante. Si ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = A \pm B$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta a_k = \beta \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \beta A\,.$$

Queste proprietà seguono direttamente dalle proprietà analoghe stabilite per le successioni convergenti.

Esempio 2.37 *Valutare* $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{5+2^k}{3^k}$.

Soluzione. Dividiamo il temine generale della serie data nei due addendi $\dfrac{5+2^k}{3^k} = \dfrac{5}{3^k} + \dfrac{2^k}{3^k} = 5\,\dfrac{1}{3^k} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^k$. Si ha allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5+2^k}{3^k} &= 5\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= 5\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{15}{2} + 3 = \frac{21}{2}\,. \end{aligned}$$

■

Esempio 2.38 *Data la serie geometrica* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k}$ *calcolare il resto relativo alla somma parziale* S_{10}.

Soluzione. Indicato con R_{10} il resto si ha

$$\begin{aligned} R_{10} &= \sum_{k=11}^{\infty} \frac{3}{2^k} = 3 \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3\left(\frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{13}} + \cdots\right) \\ &= 3\,\frac{1}{2^{11}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = 3\,\frac{1}{2^{11}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= 3\,\frac{1}{2^{11}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2^{10}} = \frac{3}{1024}. \end{aligned}$$

■

2.2.4 Convergenza o Meno delle Serie

La conoscenza della somma di una serie risolve in toto il problema di sapere se una serie converge o meno. Rimane comunque da vedere se e quali sono i metodi che ci permettano di sapere se una serie è convergente o meno. Cominciamo col notare la condizione necessaria per la convergenza.
Abbiamo definito la convergenza della serie attraverso la convergenza della sua successione delle somme parziali, cioè se esiste finito il $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Questo fatto implica che la differenza tra i due termini S_n e S_{n-1} tenda a zero per n tendente all'infinito. Ma la differenza S_n-$S_{n-1} = a_n$,. si ha così

Teorema 2.39 ***(Condizione necessaria per la convergenza)***
Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *la serie non converge.*

Nota 2.40 *Fate attenzione all'affermazione del teorema. Essa* ***NON*** *garantisce la convergenza della serie se* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
La serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ *né è un classico esempio. Il teorema garantisce solo la non convergenza se* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. *E' quindi, come si dice, un criterio necessario (se non è soddisfatto non c'è sicuramente convergenza) ma non sufficiente (se è soddisfatto la serie potrebbe comunque non convergere, vedi* $\sum 1/n$ *).*

Per determinare la convergenza delle serie si ha bisogno di test più sofisticati che vedremo nel prossimo paragrafo.

Esempio 2.41 *Dire se converge la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k}{10^6 + 2^k}$.

Soluzione. Il termine generale della serie a_n è dato da $a_n = \dfrac{2^k}{10^6 + 2^k}$. Si ha che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2^k}{10^6 + 2^k} = 1$. La serie non converge. ■

2.2.5 Esercizi

1. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ converge al numero $e \approx 2.718282$.
   (a) Calcolare $a_1,\ a_2,\ a_5$, ed a_{10}.
   (b) Calcolare $S_1,\ S_2,\ S_5$, e S_{10}.
   (c) Spiegare come mai $\{S_n\}$ è una successione monotona crescente.
   (d) Calcolare $R_1,\ R_2,\ R_5$, e R_{10}.
   (e) Spiegare come mai $\{R_n\}$ è una successione monotona decrescente.
   (f) Con la calcolatrice o il computer determinare il primo valore di n per cui S_n differisce da e meno di 0.001
   (g) Con la calcolatrice o il computer determinare il primo valore di n per cui S_n differisce da e meno di 0.00001.
2. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge al numero $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.64493$.
   (a) Calcolare $a_1,\ a_2,\ a_5$, ed a_{10}.
   (b) Calcolare $S_1,\ S_2,\ S_5$, e S_{10}.
   (c) Spiegare come mai $\{S_n\}$ è una successione monotona crescente.
   (d) Calcolare $R_1,\ R_2,\ R_5$, e R_{10}.
   (e) Mostrare che $R_n < 0.05$ per $n \geq 20$.
   (f) Calcolare $\lim_{n\to\infty} R_n$.
3. Considerate la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k}$
   (a) Calcolare $a_1,\ a_2,\ a_5$, ed a_{10}.
   (b) Calcolare $S_1,\ S_2,\ S_5$, e S_{10}.
   (c) Mostrare che la successione S_n è monotona crescente, limitata superiormente.
   (d) Trovare la somma della serie.
   (e) Calcolare $R_1,\ R_2,\ R_5$, e R_{10}.
   (f) Mostrare che la successione R_n è monotona decrescente, limitata inferiormente.
4. Considerate la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-0.6)^n$

(a) Calcolare $a_1,\ a_2,\ a_5$, ed a_{10}.

(b) Calcolare $S_1,\ S_2,\ S_5$, e S_{10}.

(c) Trovare la somma della serie.

(d) Calcolare $R_1,\ R_2,\ R_5$, e R_{10}.

(e) La successione S_n è monotona? Giustificare la risposta.

(f) Valutare l'andamento della successione R_n.

(g) Mostrare che al successione $\{|R_n|\}$ è monotona decrescente.

(h) Calcolare $\lim_{n\to\infty} R_n$.

5. Considerate la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k+2^k}$

(a) Calcolare $S_1,\ S_2,\ S_5$, e S_{10}.

(b) Mostrare che la successione S_n è monotona crescente.

(c) Mostrare che $a_k \leq 2^{-k}$ per ogni $k \geq 0$.

(d) Usare (c) per dimostrare che la successione S_n è limitata superiormente.

(e) Mostrare che la serie converge.

6. Sapendo che $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$ calcolare $\sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{(m+1)^4}$, $\sum_{k=3}^{\infty} \dfrac{1}{k^4}$.

7. Trovare il valore della somma delle seguenti serie:

(a) $\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{128}+\ldots+\dfrac{1}{2^{i+4}}+\cdots$; $2-7+8+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}+\cdots$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan 1)^n$;

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k$; $\sum_{j=1}^{\infty} \left(-\dfrac{3}{4}\right)^j$;, $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l+3^l}{4^l}$

8. Mostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+\cos n}$ diverge.

9. Trovare un'espressione per la somma parziale delle seguenti serie. Usare il risultato per determinare la convergenza o meno della serie. Valutare, infine, la somma della serie.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\,(k+1) - \arctan k\,;\ \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(n-1)}\,;$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!};\ \ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{3}{r^2+r};$

(c) $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+2}}\right)\ ;\ \ \sum_{j=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{j}\right)\ ;\ \ \sum_{i=0}^{\infty} \cos i\pi\,.$

10. Esprimere $\sum_{m=4}^{\infty} \frac{2^{m+4}}{5^m}$ come numero razionale.

11. Dire per quali valori di x convergono le seguenti serie.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k\,;\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^k}\,;\ \sum_{k=3}^{\infty} x^{2k}.$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (\ln x)^n\ ;\ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos x}{2}\right)^k\ ;\ \sum_{k=0}^{\infty} (\arctan x)^k$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{-k}\,;\ \sum_{k=0}^{\infty} (1+x)^k\ ;\ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^k.$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{e}\,;\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}\,dx\right)\ ;\ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_0^m e^{-x} dx\right).$

2.3 Criteri di Convergenza e Stima

In teoria il problema della convergenza o meno delle serie è, come abbiamo visto semplice: *la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge ad* S *se e solo se la successione delle somme parziali*$\{ S_n\}$ *converge ad* S.
In pratica il problema si complica alquanto, visto che i casi in cui è possibile calcolare esplicitamente la somma parziale S_n sono pochi. Si deve allora cercare di costruire criteri che ci permettano di valutare, pur senza poter calcolare la somma parziale S_n, la convergenza o meno della serie.
Iniziamo lo studio nel caso più semplice, quando la serie è a termini positivi, cioè $a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Come abbiamo già osservato, in questo caso si ha che

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \cdots$$

La successione delle somme parziali è monotona crescente, la domanda da porsi è allora quella di sapere se questa successione è o meno superiormente limitata; in questo caso è anche convergente.

Esempio 2.42 *Dire se converge la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k+1}$.

Soluzione. Notiamo che $\dfrac{1}{2^k+1} < \dfrac{1}{2^k} \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Ne segue che $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k+1} < \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ è convergente e sappiamo calcolarne la somma, $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = 2$. Ne risulta che anche la serie data è convergente. ■

Ciò che abbiamo fatto è stato: maggiorare la serie data con una serie convergente e concludere che se la serie con i termini maggiori converge allora anche la serie data converge.

Precisiamo quanto osservato nel seguente teorema

Teorema 2.43 ***(Teorema del confronto per serie a termini positivi)*** *Supponiamo che* $\forall k \in \mathbb{N}$ *sia* $0 \leq a_k \leq b_k$. *Consideriamo le due serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.
(a) *Se la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge allora anche la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge e*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ .$$

*(**b**) Se la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge , allora anche la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverge.*

Nota 2.44 *Abbiamo supposto che* $\forall k \in \mathbb{N}$ *sia* $0 \le a_k \le b_k$. *Questo non è completamente necessario. Ci basta che questo avvenga da un certo indice in poi, cioè che esista* $N \in \mathbb{N}$ *tale che* $0 \le a_k \le b_k \; \forall k \ge \dot{N}$ *In questo caso è*

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \le \sum_{k=N}^{\infty} b_k$$

Per calcolare la somma mancano i primi termini, ma come noto la somma di un numero finito di termini è sempre finita.
Vogliamo qui notare che un teorema del confronto analogo si aveva per gli integrali impropri. Si aveva che se $0 \le a(x) \le b(x)$, $1 \le x \le +\infty$, *allora*

$$\int_1^{\infty} a(x)\ dx \le \int_1^{\infty} b(x)\ dx \ .$$

Esempio 2.45 *Abbiamo visto che la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k+1}$ *converge. Consideriamo il valore della somma parziale* S_{10}*; qual'è l'ordine di approssimazione rispetto al valore* S *della somma della serie?*

Soluzione. Sappiamo che $S = S_{10} + R_{10}$, cioè che

$$S = S_{10} + R_{10} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k+1} + \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{2^k+1} \ .$$

Sappiamo inoltre che vale la disuguaglianza

$$\frac{1}{2^k+1} < \frac{1}{2^k}$$

Ne segue che si ha

$$\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{2^k+1} < \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ .$$

Il termine $\sum_{k=101}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{13}} + \cdots \\ &= \frac{1}{2^{11}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) = \frac{1}{2^{11}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{10}} \ . \end{aligned}$$

Se proviamo a calcolare $\frac{1}{2^{10}}$ si ha che $\frac{1}{2^{10}} \approx 9.7656 \times 10^{-4}$ L'errore che si commette è al più sulla quarta cifra decimale. ■

L'idea del confronto è facile da capire. Non sempre, nella pratica, è banale vedere quale sia la maggiorazione da fare. Vogliamo allora considerare un altro test del confronto che coinvolge l'uso degli integrali.

E' noto che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx \;\text{ diverge, mentre }\; \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \;\text{ converge .}$$

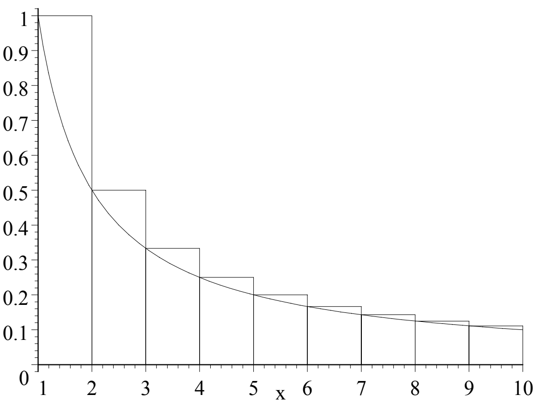
L'intuito ci dice che si ha anche

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \;\text{ diverge, mentre }\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \;\text{ converge .}$$

Vediamo come sostanziamo il nostro intuito.

Supponiamo di aver individuato una funzione $a(x)$ tale che $a(k) = a_k$, k intero. Allora la somma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ la si può identificare come una somma parziale dell'integrale $\int_1^{+\infty} a(x)\, dx$ pensando ad una partizione di $[1, +\infty)$ di ampiezza 1 fatta sugli interi. Osserviamo il disegno.

$1/x$



Se $\int_1^{\infty} a(x)\, dx$ diverge, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

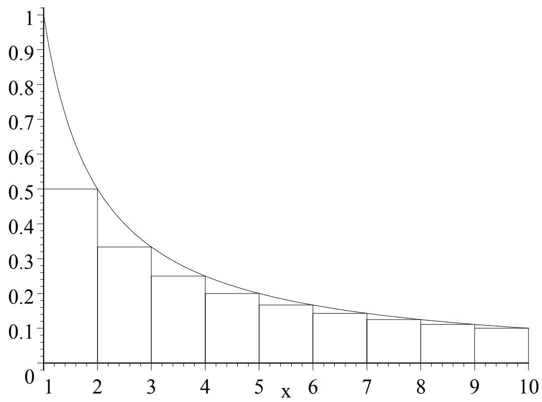
Notiamo che tutti i rettangoli hanno larghezza 1 e altezza $a(k) = a_k$, quindi la loro area è a_k . Quindi l'idea è la seguente *la serie rappresenta una somma parziale superiore (sinistra)* quando x varia tra 1 e $+\infty$ quindi è

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \int_1^{+\infty} a(x)\, dx$$

Ne segue che *se l'integrale diverge anche la serie diverge.*

NOTA Il precedente ragionamento richiede (come la figura evidenzia) che la funzione $a(x)$ sia **monotona decrescente**, perché solo questa ipotesi ci garantisce che l'area di ogni singolo rettangolo sia maggiore della somma sinistra.

Consideriamo adesso la seguente figura



Se $\int_1^\infty a(x)\ dx$ converge, allora $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge

Ancora, tutti i rettangoli hanno larghezza 1 e altezza $a(k) = a_k$, quindi la loro area è a_k , stavolta però il primo rettangolo ha area a_2, poi a_3 e così via. Quindi *la serie* $\sum_{k=2}^\infty a_k$ *rappresenta una somma parziale superiore (destra)* quando x varia tra 1 e $+\infty$. Si ha perciò

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{+\infty} a(x)\ dx$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze precedenti si ha

$$\int_1^{+\infty} a(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq a_1 + \int_1^{+\infty} a(x)\ dx\ .$$

Possiamo allora enunciare il seguente

Teorema 2.46 ***(Test dell'integrale per serie positive)*** *Sia* $\sum_{k=1}^\infty a_k$ *una serie a termini positivi e sia* $a(x)$ *una funzione positiva, monotona decrescente, definita su* $[1, +\infty)$ *tale che* $a(k) = a_k$ *per ogni intero* $k \in \mathbb{N}$. *Si ha* *allora che* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge se e solo se* $\displaystyle\int_1^{+\infty} a(x)\, dx$ *converge. Inoltre, per il resto n-esimo* R_n *vale la seguente stima*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} a(x)\, dx\,.$$

P-Serie: Convergenza e Divergenza

Chiameremo *p-serie* una serie della forma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$. Esse formano una famiglia importante anche per gli esempi ed i confronti che ci possono fornire al variare dell'esponente p.

Problema 2.47 *Per quali valori di p una p-serie converge?*

Dimostrazione. La teoria degli integrali impropri ci dice che $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ converge se e solo se $p > 1$. Quindi il test integrale si dice che
Una p$-$serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ *converge se e solo se* $p > 1$.
In particolare la serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. ■

Esempio 2.48 *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ *converge per il test dell'integrale ad un limite S. Quanto deve essere grande n per essere sicuri che* S_n *disti da S per meno di* 10^{-4}?.

Soluzione. Bisogna scegliere n in modo che il resto $n-$esimo sia minore di 0.0001. Il test dell'integrale ci dice che

$$R_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$$

Bisogna perciò trovare quale è il primo n per cui

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx \leq 0.0001$$

Calcoliamo l'integrale, è

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\bigg|_n^{\infty} = \frac{1}{2\,n^2}$$

Deve perciò essere

$$\frac{1}{2\,n^2} \le 10^{-4} \implies n^2 \ge \frac{10^4}{2} \implies n \ge \frac{100}{\sqrt{2}} \approx 70.711 \implies n = 71 \,.$$

Si ha quindi che $S_{71} = \sum_{k=1}^{71} \frac{1}{k^3} \approx 1.20196$ dista dalla somma S per meno di 0.0001. ■

Esempio 2.49 *Dire se converge la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10k+1}$.

Soluzione. Se consideriamo la funzione $a\,(x) = \dfrac{1}{10x+1}$ si ha che è monotona decrescente e sugli interi riproduce i termini della serie. Si può quindi usare il test dell'integrale. Si ha

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{10x+1}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{1}{10x+1}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{\ln\,(10x+1)}{10}\right|_1^n = +\infty$$

quindi la serie non converge, ma diverge.
Proviamo ad usare anche il test del confronto. Poiché $1 \le k$ si ha

$$\frac{1}{10k+1} \le \frac{1}{11k}$$

per cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10k+1} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{11k} = \frac{1}{11} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

L'ultima è la serie armonica, che come abbiamo visto diverge, quindi diverge anche la serie data (come già sapevamo). ■

Il Test del Rapporto: Confronto con una Serie Geometrica

In una serie geometrica

$$r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + r^{n+1} + \cdots$$

il rapporto tra due termini successivi, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ è r e la serie converge se e solo se $|r| < 1$. Il test del rapporto è basato sullo stesso principio ed infatti nella sua dimostrazione formale si riconduce al confronto con una serie geometrica.

Teorema 2.50 ***(Test del rapporto per serie a termini positivi)*** *Supponiamo che la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *sia a termini positivi e che*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L\ .$$

- *Se* $L < 1$*, la serie converge;*
- *Se* $L > 1$*, la serie diverge*
- *Se* $L = 1$ *sono possibili sia la convergenza che la divergenza. Il test non è in grado di dare risposta.*

Dimostrazione. (**Solo un'idea di dimostrazione).** Per illustrare la connessione tra il test del rapporto e le serie geometriche e allo stesso tempo dare un'idea della dimostrazione, consideriamo il caso in cui sia

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2}\ .$$

Come mai la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge?
L'idea è che per valori di k abbastanza grande la condizione $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{1}{2}$ implica che $a_{k+1} \approx \dfrac{a_k}{2}$ e quindi la serie si comporta come una serie geometrica.
Supponiamo, per fissare le idee, che sia $a_{k+1} < 0.6\, a_k$ per tutti i valori di $k \geq 1000$. Si ha allora

$$a_{1001} < (0.6)\ a_{1000}\ ,\quad a_{1002} < (0.6)\ a_{1001} < (0.6)^2\ a_{1000}\ ,\quad a_{1003} < (0.6)^3\ a_{1000}$$

così

$$\begin{aligned} \sum_{k=1000}^{\infty} a_k &= a_{1000} + a_{1001} + a_{1002} + a_{1003} + \cdots \\ &< a_{1000}\left(1 + (0.6) + (0.6)^2 + (0.6)^3 + \cdots\right)\ . \end{aligned}$$

Quest'ultima disuguaglianza è quella che fornisce il risultato.
Essa afferma che la serie $\sum_{k=1000}^{\infty} a_k$ è maggiorata dalla serie geometrica convergente $a_{1000} \sum_{k=1}^{\infty} (0.6)^k$.
La divergenza della serie nel caso $L > 1$ si dimostra in modo analogo. ■

Osservazione:

Sono molte le serie per le quali **il test del rapporto tende ad** 1. In queste situazioni *niente si può dire* del comportamento della serie. Notiamo, per esempio che questo è il caso per le *p-serie* qualunque sia l'indice p.

Il criterio **funziona bene** per serie del tipo $\sum 1/k!$, $\sum r^k$ e $\sum 1/\left(2^k+3\right)$ in cui l'indice k compare come esponente o fattoriale.

Esempio 2.51 *Mostrare che la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ *converge. Cercare di individuare il suo limite.*

Soluzione. Usiamo il test del rapporto. Si ha

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0\ .$$

La serie converge. Non solo, come possiamo vedere calcolando i primi termini alla decima cifra decimale, essa converge rapidamente.

$$\begin{aligned} S_5 &= \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = 2.716666667\ ; \\ S_{10} &= \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} = 2.718281801\ ; \\ S_{100} &= \sum_{k=0}^{100} \frac{1}{k!} = 2.718281828\ ; \end{aligned}$$

Come possiamo notare, le cifre della somma S_{100} sono uguali a quelle dell'approssimazione alla decima cifra decimale, del numero e. Ci possiamo allora domandare se la somma della serie è proprio il numero e. La risposta è positiva.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

■

Esempio 2.52 *Dire se converge la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{100^k}{k!}$.

Soluzione. Applichiamo il test del rapporto. E'

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{100^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{100^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{100}{k+1} = 0\ .$$

La serie quindi converge. Il risultato ci dice che nonostante il termine 100^k cresca molto velocemente $k!$ cresce ancora più velocemente. ■

2.3.1 Esercizi

1. Usare il test del confronto per mostrare che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k+2^k}$

   (a) converge;

   (b) mostrare che $0 \le R_{10} \le 2^{-10}$;

   (c) dire qual'è il minimo valore di n per cui $S - S_n < 10^{-5}$;

   (d) dire se la stima di (c) è per eccesso o per difetto.

2. Considerare la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2+3^k}$

   (a) mostrare che la serie converge;

   (b) stimare il valore del limite con un errore massimo di 0.001 ;

   (c) dire se la stima di (b) è per eccesso o per difetto.

3. Nei prossimi esercizi supporre che $a(x)$ sia continua, positiva, decrescente per tutti gli $x \ge 1$ e che $a(k) = a_k$ per tutti gli interi $k \ge 1$ Si possono usare, per esempio, i comandi `leftbox` e `rightboxm` per disegnare grafici che aiutino a rispondere.

   (a) dati i numeri $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\int_1^{\infty} a(x)\ dx$, $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ ordinarli in ordine crescente;

   (b) fare la stessa cosa per $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, $\int_n^{\infty} a(x)\ dx$, $\int_{n+1}^{\infty} a(x)\ dx$

   (c) mostrare che $\int_1^{n+1} a(x)\ dx \le \sum_{k=1}^{n} a_k$

   (d) mostrare che $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le a_{n+1} + \int_{n+1}^{\infty} a(x)\ dx \le \int_n^{\infty} a(x)\ dx$.

4. Negli esercizi che seguono, usare il test dell'integrale per trovare un limite superiore ed uno inferiore alla somma della serie

   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+1}$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-k}$

   (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\sqrt{k}}$

5. Mostrare che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \log n}$ diverge

6. Mostrare che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^2}$ diverge

7. Mostrare che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ diverge

8. Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty}$

   (a) spiegare perché il criterio dell'integrale non può essere usato

   (b) mostrare che la serie converge.

9. Usare il criterio del rapporto per mostrare la convergenza delle seguenti serie

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$, $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j!}{(2j)!}$

   (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^i}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$

10. Determinare la convergenza o meno delle seguenti serie.

    (a) $\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{4000} + \cdots$

    (b) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{1+m^5}$

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n^2}}$

    (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{1+k^3}$

    (e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+k+1}$

    (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3}}$

    (g) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \cdots$

11. **Criterio di condensazione di Cauchy**. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi tale che $a_{n+1} \leq a_n$ per tutti gli $n \geq 1$

(a) Sia $m \geq 1$ un numero intero. Spiegare perché

$$2^{m-1}a_{2^m} \leq a_{2^{m-1}+1} + a_{2^{m-1}+2} + \cdots + a_{2^m} \leq 2^{m-1}a_{2^{m-1}}$$

(b) usare il risultato di (a) per mostrare che $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=2}^{2^m} a_n$

(c) usare (b) per mostrare che se $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverge allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

(d) siano m ed n interi tali che $n \leq 2^m$. Usare (a) per mostrare che $\sum_{k=2}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1}a_{2^{k-1}}$

(e) usare (d) per mostrare che se $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge, allora converge anche $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

12. Usare l'esercizio precedente per mostrare che la serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge

13. Usare l'esercizio (11) per mostrare che la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^p}$ converge se $p > 1$, diverge altrimenti.

2.4 Serie a Segni Alterni

I criteri del confronto, dell'integrale e del rapporto si applicano solo a serie a termini positivi. Queste non sono, come ovvio, le uniche serie possibili. Ci sono serie a segni alterni che sono di notevole interesse.

Esempio 2.53 *Consideriamo la serie a segni alterni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Cosa possiamo dire del suo comportamento?

Soluzione. A questo livello di conoscenza non siamo in grado di usare nessuno dei criteri noti per poter dare una risposta definitiva. Possiamo, prima di cercare un metodo teorico che ci permetta una risposta, provare ad usare i software che abbiamo usato lungo tutto il volume, per avere conferma ad intuizioni o confronto con i calcoli fatti.

Usando, per esempio il comando `sum` di Maple, possiamo scrivere

```
>sum((-1)^(n+1)*(1/n), n=1..N);
```

e calcolare la somma (arrotondata, per esempio alla decima cifra decimale). Facciamolo per `N=3, 5, 10, 30, 100, 1000 si ha`

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx 0.8333333333 \quad \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx 0.7833333333$$
$$\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx 0.6456349206 \quad \sum_{n=1}^{30} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx 0.6767581377$$
$$\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx 0.6881721793 \quad \sum_{n=1}^{1000} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx 0.6926474306$$

Si nota chiaramente che passando da dall'indice 10 in poi le somme rimangono al di sotto del numero 0.7.

Costruiamo anche il grafico che ha in ascisse l'indice N ed in ordinate $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ Per fare ciò usiamo il seguente comando di *Maple*

```
>pointplot({seq([n,sum(((-1)^(k+1))*(1/k),k=1..n)],n=1..100)});
```

Si ottiene

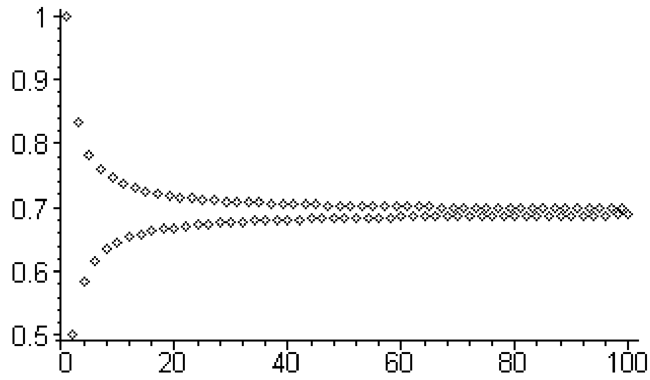


Grafico delle somme parziali per $N = 1, ..., 100$

A causa dei segni alterni, le somme parziali salgono e diminuiscono alternativamente tenendosi una volta sotto e l'altra sopra il valore della somma che sembra essere nell'intorno di 0.69. In effetti si può dimostrare (non banalmente) che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0.6931471806$. ■

2.4.1 Convergenza e Convergenza Assoluta

La serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ serve bene ad illustrare il fatto che mentre essa converge, la serie dei suoi valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, come abbiamo visto usando il test dell'integrale.

Esempio 2.54 *Converge la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ *? Se si cosa si può dire della convergenza della serie dei valori assoluti?*

Soluzione. Pur non avendo ancora un criterio per decidere della convergenza o meno delle serie a segni alterni, potremmo operare come prima e calcolare al computer, o far disegnare, il grafico $\left(N, \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right)$ al variare di N .

Per fare i conti, un modo è usare il comando *Maple* (Provare a fare)
`>sum('(-1)^(n+1)/n^2', 'n'=0..N);` (dove `N` è il numero scelto)

Scopriremmo che la serie converge. Non solo, se adesso consideriamo la serie dei valori assoluti essa è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che, come sappiamo, converge. ■

Siamo così di fronte a due serie a segni alterni che, pur convergendo, hanno proprietà diverse rispetto al comportamento delle serie dei loro valori assoluti. Nel secondo caso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge così come la serie dei suoi valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Definizione 2.55 *Diremo che la serie a segni alterni* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n \geq 0$ ***converge assolutamente*** *se converge ed inoltre, converge la serie dei valori assoluti* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Vogliamo qui ricordare (solo perché molto particolare e da riflettere) una proprietà stupefacente delle serie che non convergono assolutamente, che contrasta totalmente con la nozione di proprietà commutativa della somma.

Proposizione 2.56 *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *convergente ma non assolutamente convergente. Sia* L *un qualsiasi numero reale. Allora i termini della serie possono essere riordinati in modo tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = L$$

Che relazione c'è tra convergenza ed assoluta convergenza delle serie a segni alterni? Abbiamo già visto che la convergenza NON implica la convergenza assoluta. D'altra parte sappiamo, dalla teoria degli integrali generalizzati che

$$\left| \int_1^{\infty} f(x)\, dx \right| \leq \int_1^{\infty} |f(x)|\, dx$$

cioè che se una funzione è assolutamente convergente, allora è anche convergente. Lo stesso criterio si applica alle serie a segni alterni

Teorema 2.57 *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie a termini non necessariamente positivi. Se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge, converge anche la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e si ha*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

L'idea della dimostrazione è quella di scrivere la serie originaria come somma di due serie, una costruita con tutti i termini positivi e l'altra con quelli negativi e mostrare che entrambe le serie convergono.

Esempio 2.58 *Converge la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$?

Soluzione. Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^2}$. Si ha $\frac{|\sin k|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$ e quindi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ che è una serie convergente. Il criterio del confronto ci dice che anche $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^2}$ è convergente. Ne segue quindi che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$ converge. ■

Esempio 2.59 *Per quali valori del numero* x *converge la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} k\, x^k$?

Soluzione. Usiamo il test del rapporto per verificarne l'assoluta convergenza (il numero x potrebbe non essere positivo).

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(k+1)\ x^{k+1}}{k\, x^k} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{k+1}{k}\, |x| = |x|$$

Il criterio del rapporto ci dice che se $|x| < 1$ la serie converge, se $|x| > 1$ la serie diverge.
Rimane da vedere cosa accade per $|x| = 1$. Si vede immediatamente che in questo caso il termine generale della serie NON tende a zero quando $n \to \infty$. Non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie, la serie non converge. ■

Esempio 2.60 *Un calcolo col computer di* $S_{100} = \sum_{k=1}^{100} (-1)^{k+1}\, k^{-3}$ *da come risultato* 0.901542. *Qual'è l'ordine di grandezza dell'errore rispetto al valore della somma* S ?

Soluzione. E'

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, k^{-3} = \sum_{k=1}^{100} (-1)^{k+1}\, k^{-3} + \sum_{k=101}^{\infty} (-1)^{k+1}\, k^{-3} = S_{100} + R_{100}$$

Dobbiamo stimare R_{100}

$$\begin{aligned} |R_{100}| &= \left| \sum_{k=101}^{\infty} (-1)^{k+1}\, k^{-3} \right| \leq \sum_{k=101}^{\infty} \left| (-1)^{k+1}\, k^{-3} \right| \\ &= \sum_{k=101}^{\infty} k^{-3} < \int_{101}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2\, x^2}\Big|_{101}^{\infty} = \frac{1}{20,000} = 0,00005 \end{aligned}$$

La stima $S \approx S_{100} \approx 0.901542$ è buona almeno fino alla quarta cifra decimale.
■

2.4.2 Convergenza e Stima dell'Errore

Per la maggior parte delle serie, a termini positivi o meno, il test dell'assoluta convergenza è normalmente l'opzione migliore. Nel caso di serie a segni *alterni*, cioè di serie della forma $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k\,,\ a_k \geq 0$ si può usare un test più efficace sia nel determinare la convergenza che a stabilire l'errore nel troncamento della somma.
Un'idea precisa la fornisce la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{1}{k}$ che abbiamo già considerato. Riscriviamo le prime somme parziali, si ha

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 - \frac{1}{2} = S_1 - \frac{1}{2} \\
S_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = S_2 + \frac{1}{3} \\
S_4 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = S_3 - \frac{1}{4} \\
S_5 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = S_4 + \frac{1}{5} \\
S_6 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = S_5 - \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Si ha allora, (controllare il grafico delle somme parziali della serie)

$$\begin{aligned}
S_1 &> S_3 > S_5 > \cdots > S_2 \\
S_2 &< S_4 < S_6 < \cdots < S_1
\end{aligned}$$

Considerando le due successioni $\{S_{2n+1}\}$ e $\{S_{2n}\}$vediamo che la prima è monotona decrescente, limitata inferiormente da S_2, mentre la seconda è monotona crescente, limitata superiormente da S_1. Ne segue che sono entrambe convergenti, inoltre è

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0 \text{ per } n \to \infty$$

quindi $\{S_{2n+1}\}$ e $\{S_{2n}\}$ hanno lo stesso limite S, somma della serie. Inoltre poiché $a_{n+1} < a_n$ ne segue che

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right| < \frac{1}{n+1}$$

Partendo da questo esempio, possiamo enunciare il seguente teorema

Teorema 2.61 ***(Criterio di Liebnitz)*** *Consideriamo la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

e supponiamo che sia:
▶ $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0\,;$
▶ $\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$
Allora la serie converge ed il suo limite S giace tra due qualsiasi somme parziali successive, cioè, per ogni $n \geq 1$ si ha $S_n \leq S \leq S_{n+1}$ oppure $S_{n+1} \leq S \leq S_n$. In particolare,

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}\,.$$

La dimostrazione segue essenzialmente i passi che abbiamo fatto considerando il caso della serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{1}{k}$. Si tratta di rendere formale ed astratto il ragionamento sostituendo a_k al termine $\dfrac{1}{k}$.

Esempio 2.62 *Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{1}{k^3}$. Cosa ci dice il criterio di Liebnitz sulla convergenza e su S_{100}?*

Soluzione. In questo contesto è $a_k = \dfrac{1}{k^3}$. Il teorema ci dice non solo che la serie converge, cosa che avevamo già visto, ma anche che

$$|S - S_{100}| < a_{101} = \frac{1}{101^3} \approx 9.705901479 \times 10^{-7}$$

cioè che l'errore che si commette sostituendo $S_{100} \approx 0.901542$ ad S è dell'ordine di $0,000001$ (un milionesimo). Equivalentemente, essendo $S_{101} \approx 0.901543$ possiamo affermare che S è compreso tra S_{100} e S_{101}. ■

Esempio 2.63 *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n+1}$ converge o diverge?*

Soluzione. A prima vista sembrerebbe si potesse applicare il test sulle serie a segni alterni. La serie è a segni alterni, ma un'ipotesi importante del teorema, e condizione necessaria per la convergenza delle serie non è soddisfatta. Infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Quindi, poiché il termine generale della serie NON tende a zero, la serie non converge. ■

Esempio 2.64 *Determinare la convergenza o meno della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2+k+1} \,.$$

Soluzione. Poiché non siamo in grado di dire, con immediatezza se la serie è a segni alterni, proviamo dapprima a vedere se la serie converge assolutamente. Si ha

$$\left|\frac{\sin k}{k^2+k+1}\right| = \frac{|\sin k|}{k^2+k+1} \le \frac{1}{k^2+k+1} < \frac{1}{k^2}$$

Da cui

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2+k+1}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\sin k}{k^2+k+1}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

L'ultima serie, come è noto, converge. Ne consegue che la serie data converge assolutamente. ■

2.4.3 Esercizi

1. Consideriamo la serie $1+2+3+4+5-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$

   (a) dire se la serie converge a qualche limite S;

   (b) la serie converge assolutamente?

   (c) Calcolare S_{15}. Dire se sovrastima o sottostima S e perché;

   (d) Usando *Maple* si ottiene $S_{60} \approx 14.902$ .Usare questo risultato per trovare una buona stima per eccesso e per difetto di S. Spiegare la risposta;

   (e) Dire quanto vale la somma della serie.

2. Abbiamo mostrato che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2+k+1}$$

   converge ad un qualche limite S.

   (a) Calcolare S_{50} (non a mano)

   (b) spiegare perché $|R_{50}| \leq \int_{50}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$;

   (c) usare (b) per dare una stima per eccesso e per difetto di S.

3. Supponiamo che la serie$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converga assolutamente.

   (a) Mostrare che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ converge.

   (b) Supponiamo che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ converga. Si può affermare che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge? Giustificare la risposta.

4. Mostrare che le serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$ converge ma non assolutamente.

5. Mostrare che le seguenti serie convergono. Calcolare poi la somma con un errore inferiore a 0.005.

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^4}$; $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2+2^k}$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{7^k + k}$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{(k^2)!}$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^{10}}{10^k}$; $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^{10}}{(k+1)\, 2^k}$

6. Dire se la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}$ converge e se converge assolutamente.

7. Sia $a_k = \int_k^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$

   (a) valutare $\lim_{k \to \infty} a_k$;

   (b) dire se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge e converge assolutamente.

8. Per quali valori di p converge la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^p}$?;

9. Per quali valori di p converge la serie $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^p}$?;

10. Per quali valori di p converge assolutamente la serie $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^p}$?;

11. Per le seguenti serie determinare se esse convergono assolutamente, convergono o meno. Per le serie convergenti dare una stima per eccesso e difetto con un errore inferiore a 10^{-4}.

    (a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n \frac{1}{n^3}$;

    (b) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m}{m^3}$; $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$;

    (c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{2k+1}$; $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m^3}{2^m}$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{2k + 3^k}$;

    (d) $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{m!}{(m^2)!}$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\arctan n}{n}$